TITLE:

On even algebraic surfaces of general type

AUTHOR(S):

今野, 一宏

CITATION:

今野, 一宏. On even algebraic surfaces of general type. 代数幾何学シンポジューム記録 1990, 1990: 175-191

ISSUE DATE:

1990

URL:

http://hdl.handle.net/2433/212707

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ

KURENAI 紅

Kyoto University Research Information Repository

代数幾何学シンポジウム記録
1990年度 pp.175-191

On Even Algebraic Surfaces of General Type

九州大・教養 今野 一宏 (Kazuhiro Konno)

0. Introduction.

本年（1990年）堀川穎二氏によって今後の一般型曲面研究の指針となるべき重要な論文が書かれた：

[1] Notes on canonical surfaces (to appear in Tôhoku Math. J.)

[2] Deformations of sextic surfaces

残念ながら論文 [1] はほとんど証明なしに結果のみ述べられている。その§5 は'Even algebraic surfaces, or semi-canonical surfaces' なる題である。ここで 2 次元コンパクト複素多様体が even surface とは、その第 2 Stiefel–Whitney class w_2 が 0 ということである。従って例え $\chi(\mathcal{O})$, K^2 といった不変量が同じでも even なものとそうでないものはホモトピー型が異なる。特にそれらのモジュライ空間は交わり得ない。§5 自体はわずか 10 行ほどで終っているものの述べられている結果の重要性はこの事からだけでも推察できると思う。また論文 [2] の 6 次曲面が even surface である事にも注意して欲しい。従って 6 次曲面の変形になっている曲面はすべて $p_g = 10$, $q = 0$, $K^2 = 24$ を満たす even surfaces である。実際 [2] ではそれらが完全に分類され、その結果モジュライ空間の既約性が示されている。

この小論の目的は一般型の even surfaces 研究の出発点である [1, §5] の結果を証明・解説し、さらに $p_g = 7$, $q = 0$, $K^2 = 16$ なる even surfaces の分類を述べることである。以下において、Sは一般型の even surface とする。$w_2 = 0$ だからその標準束 Kは 2 で割り切れるから $K = 2L$ と書くことにする。このとき Sは必然的に極小である。Kは nef なので L も nef である。

1. The case where $L^2 < 2h^0(L) - 4$.

本節と次節では [1, §5] の結果 (下の Theorem 1.3 と Theorem 2.3) に証明を与える。

Lemma 1.1. L から誘導される有理写像Φ_Lの像が曲面ならば

$$L^2 \geq 2h^0(L) - 4 \tag{1.1}$$

証明はもう少し一般的な設定で堀川氏の論文

[3] Algebraic surfaces of general type with small c_1^2. I, Ann. of Math. 104 (1976), 357–387

の§7 に書いてあるが、以下の話の都合上ここにも記す。

Proof of Lemma 1.1. $\sigma : \tilde{S} \to S$を $|\sigma^* L|$ の可動部分 $|M|$ が free になるような最短のブローアップの合成とする。一般の $C \in |M|$ は非特異既約であり

$$h^0(M|_C) \geq h^0(M) - 1 = h^0(L) - 1 \tag{1.2}$$

一方 Clifford の定理より

$$M^2 \geq 2h^0(M|_C) - 2 \tag{1.3}$$

また

$$L^2 = M^2 + (M + \sigma^* L)Z \geq M^2 \tag{1.4}$$

ここに Zは $|\sigma^* L|$ の固定部分である。従って (1.2), (1.3), (1.4) より (1.1) を得る。q.e.d.

さて $L^2 < 2h^0(L) - 4$ としてみよう。Lemma 1.1 によればΦ_Lの像は曲線である。このとき $h^0(L) \leq n + 1$ なるある正整数 n によって $L \equiv nD + Z$(数値的同値) と書ける。ここに DはΦ_Lの一般ファイバーである。仮定より $n \geq 2$, $L^2 < 2n - 2$ だから $L^2 = nLD + LZ \geq nLD$より $LD = 0, 1$ 。もし $LD = 0$ ならば $KD = 0$ なので D は (-2)curve になってしまい矛盾。従って $LD = 1$である。このとき $1 = LD =$

$nD^2 + DZ \geq nD^2$なので $D^2 = 0$ となる。これらのことよりΦ_Lは genus two fibration を与えることがわかる。

THEOREM 1.2. (Horikawa) Even surface が genus two fibration を持てば $K^2 = 2p_g - 4 + 4q$を満たす。

証明は特異ファイバーが高々有理二重点より生じるものに限る事に注意すれば小平記念論文集収録の堀川氏の論文

[4] On algebraic surfaces with pencil of curves of genus two

より従う。実際 [4] では genus two fibration の特異ファイバーが (0) 型〜 (V) 型の 6 種類に分類されているが、(0) 型以外のファイバーには自己交点数-1の因子が含まれている。従って even surface は (0) 型のファイバーしか持ち得ない。この時 $K^2 = 2p_g - 4 + 4q$ になる事は [4, Theorem 3] にある。

よって

THEOREM 1.3. 一般型 even surface Sの標準束の半分 L が $L^2 < 2h^0(L) - 4$ を満たせば Sは genus 2 fibration を持ち $K^2 = 2p_g - 4 + 4q$ である。

$q = 0$ なるものはすべて [3] に書いてある。下に $q \geq 0$ の例を与える。

EXAMPLE 1.4. Cを種数 qの非特異曲線として $\mathbf{P}^1$-束

$$\pi : W = \mathbf{P}(\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C(A)) \to C$$

を考える。ここに A は $\deg A = 4k$ $(k > q+1)$ なる因子である。Wの minimal section をΔで表す。次に C上の次数 $6k + 2(q-1)$ の因子 A_1を $3A$ と $2A_1 - 2K_C$が線型同値になるようにとる。このとき $Bs|5\Delta + 2\pi^*(A + A_1 - K_C)| = \emptyset$ である。一般の $B \in |6\Delta + 2\pi^*(A + A_1 - K_C)|$ を考えると

$$B\Delta = (2\deg(A_1 - K_C) - 3\deg A) - \deg A = -4k < 0$$

なので $B = \Delta + B_0$, $B_0 \in |5\Delta + 2\pi^*(A + A_1 - K_C)|$, だが B_0は非特異としてよく $B_0\Delta = 0$ なので Bも非特異である。Bで分岐する Wの二重被覆を $f : S \to W$とする

と S の標準束は$\Delta + A_1$より誘導される。Δは branch locus の一部なので $f^*\Delta = 2Z$ と書ける。よってあらかじめ $A_1 \sim 2A_2$(線型同値) となるように A_1を選んでおけば, $K \sim 2Z + 2f^*\pi^*A_2$なので Sは even になる。$L = [Z + f^*\pi^*A_2]$ とおくと

$$L^2 = Z^2 + 2Zf^*\pi^*A_2 = -\frac{1}{2}\deg A + \deg A_1 = 4k + 2(q-1)$$

また Riemann–Roch の定理より

$$h^0(L) \geq h^0(C, \mathcal{O}(A_2)) \geq \deg A_2 + 1 - q = 3k$$

従って

$$L^2 - (2h^0(L) - 4) \leq 4k + 2(q-1) - 6k + 4 = 2(q + 1 - k) < 0$$

を得る。Lemma 1.1 よりΦ_Lは genus 2 pencil を与える。

2. The case where $L^2 = 2h^0(L) - 4$.

この節では $K = 2L$ なる L に対し $L^2 = 2h^0(L) - 4$ が成立し、かつΦ_Lはその像 V の上に generically finite であると仮定する。

$h^0(L) = n + 1$ とおく。$L^2 = 2n - 2$ である。(1.2), (1.3), (1.4) においてすべて等号が成立しているから $|L|$ は free でその一般元 Cは超楕円的かつ $h^0(L|_C) = n$である。またΦ_Lより誘導される正則写像を $f : S \to V$とすれば

$$2n - 2 = L^2 \geq (\deg f)(\deg V) \geq (n-1)\deg f$$

だから $\deg f \leq 2$である。Cは超楕円的なのだから $\deg f = 1$とはなり得ず、従って $\deg f = 2$, $\deg V = n - 1$となる。

Lemma 2.1. $h^1(L) = 0$, $q(S) = 0$, $p_g(S) = 3n$

Proof. $K = 2L$ なので Ramanujam の消滅定理より $H^1(3L) = H^1(K + L) = 0$を得る。明らかに $h^2(3L) = h^0(-L) = 0$なので Riemann-Roch の定理より

$$h^0(3L) = \frac{3}{2}L^2 + 1 - q + p_g = 3n - 2 + p_g - q$$

一方 $V \subset \mathbf{P}^n$ は次数 $n-1$ の曲面なので $h^0(V, \mathcal{O}(3)) = 6n-2$ である。従って $h^0(3L) \geq h^0(V, \mathcal{O}(3))$ より $p_g - q \geq 3n$ を得る。

再び Riemann–Roch の定理より

$$(2.1) \qquad 2h^0(L) - h^1(L) = -\frac{1}{2}L^2 + 1 - q + p_g$$

すなわち $h^1(L) = 3n - p_g + q$ となる。$h^1(L) \geq 0$ だから $p_g - q = 3n$ かつ $h^1(L) = 0$ でなければならない。ここで一般の $C \in |L|$ に対して

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(L) \to \mathcal{O}_C(L|_C) \to 0$$

より得られる cohomology long exact sequence を考えると $h^0(L|_C) = h^0(L) - 1$ だったから $h^1(L) = 0$ より $q = h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ が出る。q.e.d.

さて V は $\mathbf{P}^n$ 内の最小次数 $n-1$ の曲面なので次のいずれかである（例えば次の永田先生の論文

[5] On rational surface I, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A 32 (1960), 351–370

を見よ)。

（ア） $\mathbf{P}^2$ $(n=2)$

（イ） Veronese surface $\simeq \mathbf{P}^2$ $(n=5)$

（ウ） Hirzebruch surface Σ_d を $|\Delta_0 + ((n-1+d)/2)\Gamma|$ で埋め込んだもの。但しΔ_0 は minimal section, Γ はファイバーで d は $n-3+d$ が非負偶数となる非負整数である $(n \geq 3)$

（エ） 次数 $n-1$ の有理曲線上の cone $(n \geq 3)$

$n=2$ ならば Lemma 2.1 より $p_g = 6$, $q = 0$, $K^2 = 8$ だから [3] に書いてある。以下、$n \geq 3$ とする。

（イ）の場合：$\mathbf{P}^2$ 上の直線を ℓ と書くと $L = 2f^*\ell$ である。従って $K = 4f^*\ell$, $f^*K_{\mathbf{P}^2} = -3f^*\ell$ だから f の ramification divisor R は $7f^*\ell$ と線型同値。故に branch locus $B = f_*R$ は 14 次曲線である。よって [3, Lemma 1.3] より B の特異点は高々 simple triple points である。逆に高々simple triple points しか持たない 14 次曲線 B をとり、B で分岐する $\mathbf{P}^2$ の二重被覆 S' を [7ℓ] の中に実現するとこれは高々有理二重点しか持ち得ない。その dualizing sheaf $\omega_{S'}$ は $K_{\mathbf{P}^2} + B/2 \sim 4\ell$ から誘導されるので

$$h^0(\omega_{S'}) = h^0(\mathbf{P}^2, \mathcal{O}(4)) = 15 = 3n, \quad h^1(\omega_{S'}) = 0$$

$$\omega_{S'}^2 = 2(4\ell)^2 = 32 = 8n - 8$$

となる。そこで S' の minimal resolution を考えると、それは期待される不変量を持ち明らかに even surface になる。

(ウ) の場合 : $L = f^*(\Delta_0 + ((n-1+d)/2)\Gamma)$ なので $K = f^*(2\Delta_0 + (n-1+d)\Gamma)$ である。Σ_dの標準束は$-2\Delta_0 - (d+2)\Gamma$ で与えられるから、fの ramification divisor は $f^*(4\Delta_0 + (n+1+2d)\Gamma)$ と、branch locus Bは $8\Delta_0 + 2(n+1+2d)\Gamma$ と各々線型同値になる。やはり [3, Lemma 1.3] より Bは高々simple triple points しか持たないことが従う。このようなBの存在条件を求めてみる。まずBは重複成分を持たぬので $B\Delta_0 \geq -d$ すなわち $3d \leq 2n+2$ が必要である。逆に容易に解るように、この条件の下で線型系 $|8\Delta_0 + 2(n+1+2d)\Gamma|$ の一般元 B に対し次が成立する。

- $2d \leq n+1$ならば B は非特異既約
- $2d > n+1$, $3d \leq 2n+2$ ならば B は$\Delta_0 + B_0$ なる形の正規交差因子で $B_0 \in |7\Delta_0 + 2(n+1+2d)\Gamma|$ は非特異既約、$\Delta_0 B_0 = 2n+2-3d$ である

さて高々simple triple points しかもたない B を取ると $K_{\Sigma_d} + B/2 \sim 2\Delta_0 + (n-1+d)\Gamma$ および

$$h^0(2\Delta_0 + (n-1+d)\Gamma) = 3n$$

$$(2\Delta_0 + (n-1+d)\Gamma)^2 = 4n-4$$

より B で分岐する二重被覆 S' に対して $h^0(\omega_{S'}^2) = 3n$, $h^1(\omega_{S'}) = 0$, $\omega_{S'}^2 = 8n-8$ を得る。$n-1+d$ は偶数だったから S' の minimal resolution は確かに even surface になる。この型の S は genus 3 の超楕円曲線束 $|f^*\Gamma|$ を持っている。

（エ）の場合：次の補題を用いれば（ウ）と同様であるが、branch locus に対する条件より $n \leq 5$ となる。

Lemma 2.2. （エ）のとき f は正則写像 $h : S \to \Sigma_{n-1}$ に lift される。

Proof. V の vertex を通る超平面のなす線型系を S に引き戻すことによって [3, Lemma 1.5] と同じ議論から $L = [(n-1)D + G]$ となることがわかる。ここに $|D|$ は既約な pencil であり G は vertex の逆像である。$|L|$ は free だったから $LG = 0$ である。従って $2n - 2 = L^2 = (n-1)LD$ より $LD = 2$ を得る。

$$2 = LD = (n-1)D^2 + DG \geq (n-1)D^2$$

だが S は even なのでもし $D^2 > 0$ ならば $D^2 \geq 2$ である。従って $D^2 = 0$, $DG = 2$ を得る。V の vertex をブローアップするとΣ_{n-1} が得られ $G \neq 0$ だから f は S からΣ_{n-1} への正則写像 h へ lift され $h^*\Delta_0 = G$ となる。 q.e.d.

以上より [1, §5] の主結果である次の定理が得られた。

Theorem 2.3. $L^2 = 2h^0(L) - 4$ でΦ_L がその像の上に generically finite ならば、$K^2 = \frac{8}{3}p_g - 8$, $q = 0$ を満たす。この様な S は minimal degree の曲面 V の二重被覆であってその branch locus は（V の vertex をのぞき）高々simple triple points しか持ち得ない。さらに Vが $\mathbf{P}^2$ と双正則でなければ（特に $h^0(L) \geq 7$ ならば）S は種数 3 の超楕円曲線束を持つ。

Remark 2.4.

(1) 逆に $K^2 = \frac{8}{3}p_g - 8$, $q = 0$ なる even surface は上記のものに限る。

(2) [1] には書かれていないがついでに deformation type の数も与えておくと $p_g + 3$ が 9 の倍数のとき 2 つ、そうでないときは 1 つである。またモジュライ空間の次元は $18n + 20 = 6p_g + 20$ である。

(3) $L^2 = 2h^0(L) - 4$ でΦ_L が pencil を与えれば前節と同様の考察で S は genus two fibration を持ち従って $K^2 = 2p_g - 4 + 4q$ を満たす事がわかる。このような曲面の例は、Example 1.4 で $k = q + 1$ とおけば構成できる（実際 Z が $|L|$ の固定部分になる）。

3. The case where $L^2 = 2h^0(L) - 2$.

次に考察すべきは $L^2 = 2h^0(L) - 2$ なる even surfaces である。もし Sが genus two fibration を持てば Theorem 1.2 よりその構造は既知であるとしてよい。従ってそうでないと仮定する。

結論から言うとこのような曲面は非常に少ない。実際、次の二つが証明できる。

LEMMA 3.1. $h^0(L) \geq 3$ でΦ_L が pencil を与えるならばそれは genus 3 の linear pencil である。このとき $h^0(L) \leq 5$ である。

PROPOSITION 3.2. $h^0(L) \geq 5$ でΦ_L がその像 V の上に generically finite ならば $\deg\ \Phi_L = 2$ で V はΔ-genus ≤ 1 の曲面である。このとき $h^0(L) \leq 10$ になる。

PROOF OF LEMMA 3.1. §1 におけると同様に $L \equiv nD + Z$ と書くと $h^0(L) \leq n+1$ なので $L^2 \leq 2n$ となる。

$$2n \geq L^2 = nLD + LZ \geq nLD$$

より $LD = 1, 2$を得る。$LD = 1$ ならば§1 と同様に D は genus 2 になってしまう。従って $LD = 2$, $LZ = 0$, $L^2 = 2n$ である。特に $h^0(L) = n + 1$ なのでΦ_L は linear pencil を与える。$n \geq 2$ とすれば $2 = LD = nD^2 + DZ \geq nD^2$より $D^2 = 0$ を得、D は genus 3 である。さて $KZ = 2LZ = 0$ だから Z の各既約成分は (-2)–curve である。Z_0 を $DZ_0 > 0$ なる Z の既約成分とする。Z_0 の重複度を m とし $Z = mZ_0 + Z'$ と書く。

$$0 = LZ_0 = nDZ_0 - 2m + Z_0Z', \quad 2 = DZ = mDZ_0 + DZ'$$

より $nDZ_0 \leq 2m$, $m \leq 2$ なので $n \leq 4$ を得る。より詳しく見ると $n = 2$ の時は Z は 2 つの交わらない (-2)-curves の和 $Z = Z_0 + Z_1$ かまたは $Z = 2Z_0 + Z'$ なる形、$n = 3$ の時は $Z = 2Z_0 + Z'$、$n = 4$ ならば $Z = 2Z_0$ である。 q.e.d.

PROOF OF PROPOSITION 3.2. これはキチンとやると長くなるので概略のみに留める。$f : S \to V$をΦ_L から誘導される有理写像とすると $2n = L^2 \geq (\deg f)(\deg V) \geq (n-1)\deg f$ なので $n = 2$ ならば $\deg f = 2, 3, 4$、$n = 3$ ならば $\deg f \leq 3$、$n \geq 4$ な

らば $\deg f \leq 2$ である。ここで仮に f が双有理とすると $p_g = h^0(2L) \geq 4h^0(L) - 6$ であって勿論標準写像も双有理だから、Castelnuovo–Horikawa の不等式

$$K^2 \geq \begin{cases} 3p_g - 7, & \text{if } q = 0, \\ \max(3p_g - 7 + q,\ 3\chi(\mathcal{O}_S)), & \text{if } q > 0 \end{cases}$$

を満たすはずである。$p_g \geq 4n - 2$, $K^2 = 8n$ だから $n = 3$ で $p_g = 10$, $q = 0$, $K^2 = 24$ の場合 (numerical sextic !) しか起こり得ない。従って $n \geq 4$ ならば $\deg f = 2$ である。このとき $\deg V = n - 1$ または n である。

$\deg V = n$ の時は $Bs|L| = \emptyset$ だから§2 とほぼ同様の議論で $p_g = 3n + 1$, $q = 0$ が証明できる。この場合 V は不正則数 0 の normal Del Pezzo surface だから $n \leq 9$ となる。

$\deg V = n - 1$ の時は $Bs|L| \neq \emptyset$ なのでまずこれを調べる必要がある：

Lemma 3.3. $\deg V = n - 1$ の時 $|L| = |M| + Z$ (variable+fixed) とすると次のいずれかが成立する。

(1) $Z = 0$ で $|M|$ の base points は 2 回の blowing up によって解消される。

(2) $Bs|M| = \emptyset$ で $LZ = MZ = 1$ かつ $Z^2 = 0$

(3) $Bs|M| = \emptyset$ で $LZ = 0$, $MZ = 2$, $Z^2 = -2$.

Proof. $\sigma : \tilde{S} \to S$ を $|\sigma^* L|$ の可動部分 $|M_0|$ が free になるようなブローアップの合成のうち最短のものとする。ある例外因子 E によって$\sigma^* L \sim M_0 + E + \sigma^* Z$ と書ける。$\deg V = n - 1$ なので $M_0^2 = 2n - 2$ である。よって $L^2 = \sigma^* L M_0 + LZ = M_0^2 + M_0 E + M_0 \sigma^* Z + LZ$ より

$$M_0 E + M_0 \sigma^* Z + LZ = 2 \tag{3.1}$$

を得る。σに現れる base points の重複度を m_i と記すと $M_0 E = \sum m_i^2$ である事に注意する。また $LZ = M_0 \sigma^* Z + Z^2$ である。

(3.1) より、$M_0 E = 2$ ならば $M_0 \sigma^* Z = LZ = 0$ かつ $Z^2 = 0$ となる。このとき Hodge index theorem より $Z = 0$ を得る。これは (1) である。$M_0 E = 1$ ならば $2 M_0 \sigma^* Z + Z^2 = 1$ なので Z^2 は奇数。これは S が even である事に矛盾する。$M_0 E = 0$ ならばσは恒等写像であって $MZ + LZ = 2$ となる。$MZ = 0$ ならば $Z^2 = 2$ になって

しまい Hodge index theorem に矛盾する。$MZ = LZ = 1$ は (2) 、$MZ = 2,\ LZ = 0$ は (3) である。 q.e.d.

V は§2の（ア）～（エ）である事、fibration を持つ曲面に関する Xiao の結果および堀川の canonical resolution を使う事によってまず Lemma 3.3 の (1), (2) が起こらぬ事と $q = 0$ が証明できる。(注：ここで Xiao の結果とは

[6] Fibered algebraic surfaces with low slope, Math. Ann. 276 (1987), 449–466

の Theorem 1, Theorem 3 のことである。また canonical resolution については堀川氏の論文

[7] On deformations of quintic surfaces, Invent. Math. 31 (1975), 43–85

の§2 を見られたい。下の§5 にその使い方の一例を示す。) Lemma 3.3 の (3) の場合には branch locus が重複成分を持たぬ事と canonical resolution を使った議論から $n \leq 7$ が示される。

以上の考察より、Proposition 3.2 が得られる。

このように $L^2 = 2h^0(L) - 2$ なる even surfaces は僅かしか存在しないのだが、残念ながら今のところ全部分類できているわけではない。特にΦ_L が pencil を与える場合にはそれが超楕円的か否かで事情が異なるので難しい。

ここで、念のため even surfaces の分類の立場から見た 6 次曲面の位置を明らかにしておく。S を $p_g = 10,\ q = 0,\ K^2 = 24$ なる even surface とする。$K = 2L$ とおくと $L^2 = 6$ なので (2.1) と

$$p_g = h^0(2L) \leq 2h^0(L) - 1 \tag{3.2}$$

より $h^0(L) = 4$ または 5 であるが、$h^0(L) = 5$ ならば $L^2 = 2h^0(L) - 4$ だから前節までに証明した事を考えれば不変量から見て起こり得ない。従って $h^0(L) = 4$ なので $L^2 = 2h^0(L) - 2$ を満たす。6 次曲面はΦ_Lが双有理となる最初の even surface である。

同様に次の節で紹介する $p_g = 7,\ q = 0,\ K^2 = 16$ なる even surface は (2.1) と (3.2) より $h^0(L) = 3,\ L^2 = 2h^0(L) - 2$ を満たすことがわかる。

4. Even surfaces with $p_g = 7$, $q = 0$ and $K^2 = 16$.

上記の不変量を持つ even surface はもともと $K^2 = 3p_g - 5$ なる canonical surfaces（すなわち標準写像が双有理写像を与えるもの）の分類に登場した。それは canonical image が Veronese surface 上の cone に入るもので下の分類では (Ia), (Ib) に相当する。

まず前節で見たように次が成立する。

Lemma 4.1. $h^0(L) = 3$, $h^1(L) = 0$

Theorem 4.2. $p_g = 7$, $q = 0$, $K^2 = 16$ なる even surfaces は$\Phi_L : S \to \mathbf{P}^2$ の性質によって次の 6 種類に分類される。(Z等の記号は前節の通り)

(Ia) Φ_Lは generically 4–to–1 holomorphic map

(Ib) $Bs|L|$ は一点でΦ_Lは generically 3–to–1 map

(II) Φ_Lは generically 2–to–1 map ($|L|$ は Lemma 3.3, (3) の形)

(III) Φ_Lは非超楕円的な genus 3 fibration を与える。($|L|$ の固定部分の形によってさらに (IIIa): $Z = Z_0 + Z_1$, (IIIb): $Z = 2Z_0 + Z'$の 2 種類に分かれる。)

(IV) Φ_Lは超楕円的な genus 3 fibration を与える ($Z = Z_0 + Z_1$) 。

ここで (IV) 型の $|L|$ の固定部分が $2Z_0 + Z'$ の形になり得ない事に注意して欲しい。一方 (III) 型には考え得る二つの形が両方現れている。このあたりにも超楕円的なものとそうでないものの違いがあらわれているのである。

さて基本的には half canonical ring $\oplus H^0(mL)$ を調べることによって各 type の曲面の定義方程式を書き上げることができる。次節で一例として (IV) 型の場合を紹介する。

(Ia), (Ib), (II) 型は $\mathbf{P}(1,1,1,2,3)$ 内の weighted complete intersection である。$\deg x_i = 1$, $0 \le i \le 2$, $\deg u = 2$, $\deg w = 3$ とし A_j, B_jは x_0, x_1, x_2の j次同次多項式を表すものとする。

(Ia)
$$\begin{cases} u^2 + A_1 w + A_4 = 0 \\ w^2 + B_4 u + B_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(Ib)}\qquad \begin{cases} A_1w + A_2u + A_4 = 0 \\ w^2 + B_0u^3 + B_2u^2 + B_4u + B_6 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} A_2u + A_4 = 0 \\ w^2 + B_0u^3 + B_2u^2 + B_4u + B_6 = 0 \end{cases}$$

(IIIa), (IIIb), (IV) 型は $\mathbf{P}(1,1,1,2,2,3)$ 内の weighted complete intersection である。$\deg x_i = 1$, $0 \le i \le 2$, $\deg u = \deg v = 2$, $\deg w = 3$ とし A_j, B_j, C_jは x_0, x_1, x_2のj次同次多項式を表すものとする。A'_j, B'_jも同様である。

$$\text{(IIIa)}\qquad \begin{cases} A_1w + A_0uv + A_2u + A'_2v + A_4 = 0 \\ w^2 + B_0u^3 + B'_0v^3 + B_2u^2 + B'_2v^2 + B_4u + B'_4v + B_6 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(IIIb)}\qquad \begin{cases} A_1w + A_0u^2 + A_2u + A'_2v + A_4 = 0 \\ w^2 + B_0uv^2 + B'_0v^3 + B_2uv + B'_2v^2 + B_4u + B'_4v + B_6 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} uv + A_2u + A'_2v + A_4 = 0 \\ w^2 + B_0u^3 + B'_0v^3 + B_2u^2 + B'_2v^2 + B_4u + B'_4v + B_6 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

これらを用いれば次の事がわかる。

Theorem 4.3. 上記の不変量を持つ even surfaces のモジュライ空間は既約（51次元）である。

実際 specialization diagram は次の様になる。

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ib} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{II} \arrow[dr] & \\
\mathrm{Ia} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{IIIa} \arrow[rr] & & \mathrm{IV} \\
& \mathrm{IIIb} & & &
\end{tikzcd}
$$

例えば t を parameter として、(IV) 型の方程式で $C_2 = 0$ を $tv - C_2 = 0$ で置き換えたものを考えれば (II)→(IV) の specialization が得られる。他も同様である。

Remark 4.4. 奇数番号の曲面は canonical surface である。偶数番号の曲面の標準写像はその像の上に generically 2–to–1 である。また $Bs|K| = \emptyset$ である。

5. Surfaces of type (IV).

Sを (IV) 型とすれば $|L| = |2D| + Z$である。ここに $|D|$ は種数 3 の超楕円曲線の pencil で、Z はふたつの交わらない (-2)–curves Z_0, Z_1 の和である。

Lemma 5.1. $P_i = D \cap Z_i$ とおくと、P_0 と P_1 は conjugate (すなわち $P_0 + P_1 \in g_2^1$) またはどちらも Weierstrass 点である。

Proof. $K \sim 4D + 2Z$ なので D の標準因子 K_Dは $2Z$ より誘導される。すなわち $2P_0 + 2P_1 \in |K_D| = 2g_2^1$である。$P_0'$を P_0の conjugate とすると $2P_1 \sim 2P_0'$となる。$P_1 = P_0'$ならば P_0と P_1は conjugate, $P_1 \neq P_0'$ならば $\dim|2P_i| > 0$ より P_iは Weierstrass 点である。 q.e.d.

Lemma 5.2. P_iは Weierstrass 点である。特に $h^0(D, \mathcal{O}_D(Z)) = 1$.

Proof. もし P_0と P_1が conjugate ならば

$$0 \to \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(3D + Z) \to \mathcal{O}_D(Z) \to 0$$

と $h^1(L) = 0$ より $h^0(3D + Z) = 5$ を得る。従って $|3D + Z|$ は $\mathbf{P}^4$内の cubic cone の上への generically 2–to–1 有理写像を与える。$(3D + Z)^2 = 8 = 2 \times 3 + 2$ より $Bs|3D + Z|$ は Lemma 3.3 と同様に次のいずれかになる。

(1) $|3D+Z|$ は固定部分を持たず底点は 2 回の blow up で解消される

(2) $|3D+Z|=|M|+G$ とおくと $Bs|M|=\emptyset$ で $MG=1,\ G^2=0$

(3) $|3D+Z|=|M|+G$ とおくと $Bs|M|=\emptyset$ で $MG=2,\ G^2=-2$

(1): $(3D+Z)Z_i=1$ なので底点は Z_i上にひとつずつある。それを各々Q_iとする。$\sigma:\tilde{S}\to S$を底点の解消とし、$E_i=\sigma^{-1}(Q_i)$ とおく。また Z_iの proper transform を$\tilde{Z}_i$と書く。$|\sigma^*(3D+Z)|$ の可動部分は $|3\sigma^*D+\tilde{Z}_0+\tilde{Z}_1|$ なので$\tilde{Z}_0+\tilde{Z}_1$が cubic cone の vertex の逆像である。従って正則写像 $f:\tilde{S}\to\Sigma_3$で $f^*\Delta_0=\tilde{Z}_0+\tilde{Z}_1$ なるものが存在する。f の ramification divisor R は $f^*(4\Delta_0+9\Gamma)+3(E_0+E_1)$ と線型同値である。また

$$2=\sigma^*D\sigma^*(3D+Z)=f^*\Gamma f^*(\Delta_0+3\Gamma)+f^*\Gamma(E_0+E_1)$$

より $E_if^*\Gamma=0$ であり、$E_if^*(\Delta_0+3\Gamma)=1$ より $f_*E_i\sim\Gamma$を得る。従って f の branch locus B は $8\Delta_0+24\Gamma$に線型同値である。$K_{\Sigma_3}+B/2\sim 2\Delta_0+7\Gamma$ だから B で分岐する二重被覆 S' を直線束 $[4\Delta_0+12\Gamma]$ の中に実現すると

$$h^0(\omega_{S'})=h^0(2\Delta_0+7\Gamma)=15,\quad h^1(\omega_{S'})=0,$$

$$\omega_{S'}^2=2(2\Delta_0+7\Gamma)^2=32$$

となる。S' の canonical resolution を$\hat{S}$と書くとその不変量は

$$p_g(\hat{S})=15-\sum\tfrac{1}{2}[m_i/2]([m_i/2]-1),$$

$$K_{\hat{S}}^2=32-\sum 2([m_i/2]-1)^2$$

で与えられる。ここに m_iは canonical resolution の過程で出現した branch locus の特異点の重複度である。さて、$|f^*B-2R|$ は effective divisor を含み $f^*B-2R\sim 6(\sigma^*D-E_0-E_1)$ なることから $[m_1/2]=4$ となる事がわかる。従って $p_g(\hat{S})=7$ より

$$\sum\frac{1}{2}\left[\frac{m_i}{2}\right]\left(\left[\frac{m_i}{2}\right]-1\right)=8=6+1+1$$

を得る。この時、$K_{\hat{S}}^2=10$ となる。特に$\hat{S}$ と$\tilde{S}$ は一致せず、このことから B が infinitely near triple point を持っていることがわかる。すると$\hat{S}$ は (-1)–curve と交わり自己交点数が-2 である因子 Y_0をこの特異点上に持つ。$\hat{S}$上の (-1)–curve を潰して S が得ら

れるからY_0はS上に$Y^2 \geq -1$なる因子Yをもたらす。Yは特異ファイバーのひとつの既約成分に過ぎないから$Y^2 < 0$, 従って$Y^2 = -1$であるがこれはSがevenである事に矛盾する。

(2), (3): $3D + Z \sim M + G$なので$2 = (3D + Z)D = MD + GD$だがΦ_MによるDの像は直線なので$MD = 2$を得る。従って$GD = 0$だからZ_iはGの成分ではない。一方、cubic cone の vertex の逆像をG'とすると$M \sim 3D + G'$なることから容易にわかるように$G' \neq 0$であり$Z - G$と線型同値になる。ところが$h^0(Z) = 1$だから上で見たことより$H^0(Z - G) = 0$なので矛盾である。 q.e.d.

従ってP_iは Weierstrass 点で$h^0(3D + Z) = 4$を得る。

Lemma 5.3. $h^0(4D + 2Z_i) = 6$, $Bs|4D + 2Z_i| = \emptyset$である。また$Bs|K| = \emptyset$

Proof. $i \neq j$とし、まず$|4D + 2Z - Z_j|$を調べる。

$$0 \to \mathcal{O}(4D + 2Z - Z_j) \to \mathcal{O}(K) \to \mathcal{O}_{Z_j} \to 0$$

より$h^0(4D + 2Z - Z_j) \geq 6$を得る。一方、$[2Z - Z_j]|_D = g^1_2 + P_j$なので$h^0(D, \mathcal{O}(2Z - Z_j)) = 2$、また$(3D + 2Z - Z_j)Z_i = -1$より$h^0(3D + 2Z - Z_j) = h^0(3D + Z) = 4$だから

$$0 \to \mathcal{O}(3D + 2Z - Z_j) \to \mathcal{O}(4D + 2Z - Z_j) \to \mathcal{O}_D(2Z - Z_j) \to 0$$

を考えると$h^0(4D + 2Z - Z_j) \leq 6$が従う。よって$h^0(4D + 2Z - Z_j) = 6$である。$|2Z - Z_j]|_D$の形から$Z_j$が$Bs|4D + 2Z - Z_j|$に含まれることがわかるから$h^0(4D + 2Z_i) = 6$を得る。$|4D + 2Z_i|$は$\mathbf{P}^5$内の quartic cone の上への次数2の有理写像を引き起こすが、$(4D + 2Z_i)^2 = 8 = 2 \times 4$なので$Bs|4D + 2Z_i| = \emptyset$.

また上で見たように制限写像$H^0(K) \to H^0(\mathcal{O}_{Z_j})$は全射である。$K = 2L$より$Bs|K| \subset \cup Z_k$であることに注意すれば$Bs|K| = \emptyset$もわかる。q.e.d.

以上で準備は終了したのでSの方程式を書く。

$\{z_0, z_1\}$を$H^0(D)$の基底とする。0でない$\zeta_i \in H^0(Z_i)$をとり$\zeta = \zeta_0\zeta_1$とおく。$H^0(4D + 2Z_i) \simeq \mathbf{C}^6$でこれは$z_0^j z_1^{4-j} \zeta_i^2$ $(0 \leq j \leq 4)$およびこれらと独立な元ξ_iで生成

される。ξ_i は Z_i上 0 でない定数である。従って $H^0(K) = H^0(4D+2Z) \simeq \mathbf{C}^7$ の基底は

$$z_0^i z_1^{4-i}\zeta^2 \quad (0 \le i \le 4),\ \zeta_0^2\xi_1,\ \zeta_1^2\xi_0$$

で与えられる。

$H^0(8D+2Z)$ を調べる。Riemann–Roch の定理より $\chi(8D+2Z) = 16$ を得る。他方 $H^q(8D+2Z)^* \simeq H^{2-q}(-4D)$ だから $h^1(8D+2Z) = 3$, $h^2(8D+2Z) = 0$ となり、$h^0(8D+2Z) = 19$ を得る。さて $H^0(8D+2Z)$ には次の 20 個の元がある。

$$\begin{cases} z_0^i z_1^{8-i}\zeta^2 \quad (0 \le i \le 8), \\ z_0^i z_1^{4-i}\zeta_0^2\xi_1 \quad (0 \le i \le 4), \\ z_0^i z_1^{4-i}\zeta_1^2\xi_0 \quad (0 \le i \le 4), \\ \xi_0\xi_1 \end{cases}$$

従ってこれらの間にはつぎの形の関係式がある。

$$\xi_0\xi_1 = \alpha_4\zeta_0^2\xi_1 + \alpha_4'\zeta_1^2\xi_0 + \alpha_8\zeta^2 \tag{5.1}$$

ここにα_k, α_k'は z_0, z_1に関する k次同次多項式である。(もし$\xi_0\xi_1$の係数が 0 になっていると Z_0等に関係式を制限することによって矛盾が導かれる。)

つぎに $H^0(3L) = H^0(6D+3Z) \simeq \mathbf{C}^{14}$を見ると次の 13 個の一次独立な元が見つかる。

$$\begin{cases} z_0^i z_1^{6-i}\zeta^3 \quad (0 \le i \le 6), \\ z_0^i z_1^{2-i}\zeta(\zeta_0^2\xi_1) \quad (0 \le i \le 2), \\ z_0^i z_1^{2-i}\zeta(\zeta_1^2\xi_0) \quad (0 \le i \le 2) \end{cases}$$

従って新しい元 ψ がある。これは Z_0上でも Z_1上でも 0 にならぬことが証明できる。

最後に $H^0(6L) = H^0(12D+6Z) \simeq \mathbf{C}^{56}$ を調べる。ここには (5.1) を法として次の 57 個の元がある。

$$\begin{cases} z_0^i z_1^{12-i}\zeta^6 \quad (0 \le i \le 12), \\ z_0^i z_1^{8-i}\zeta^4(\zeta_0^2\xi_1) \quad (0 \le i \le 8), \\ z_0^i z_1^{8-i}\zeta^4(\zeta_1^2\xi_0) \quad (0 \le i \le 8), \\ z_0^i z_1^{4-i}\zeta^2(\zeta_0^2\xi_1)^2 \quad (0 \le i \le 4), \\ z_0^i z_1^{4-i}\zeta^2(\zeta_1^2\xi_0)^2 \quad (0 \le i \le 4), \\ \quad (\zeta_0^2\xi_1)^3,\quad (\zeta_1^2\xi_0)^3, \\ z_0^i z_1^{6-i}\zeta^3\psi \quad (0 \le i \le 6), \\ z_0^i z_1^{2-i}\zeta(\zeta_0^2\xi_1)\psi \quad (0 \le i \le 2), \\ z_0^i z_1^{2-i}\zeta(\zeta_1^2\xi_0)\psi \quad (0 \le i \le 2), \\ \quad \psi^2 \end{cases}$$

最初の 56 個は明らかに一次独立だから必要ならばψをとりかえて

$$(5.2)\qquad \begin{aligned}\psi^2 &= \beta_0(\zeta_0^2\xi_1)^3+\beta_0'(\zeta_1^2\xi_0)^3+\beta_4\zeta^2(\zeta_0^2\xi_1)^2+\beta_4'\zeta^2(\zeta_1^2\xi_0)^2\\ &\quad+\beta_8\zeta^4(\zeta_0^2\xi_1)+\beta_8\zeta^4(\zeta_1^2\xi_0)+\beta_{12}\zeta^4\end{aligned}$$

なる関係式を得る。但しβ_k, β_k'は z_0, z_1の k次式である。

さてここで $x_0=z_0^2\zeta$, $x_1=z_0z_1\zeta$, $x_2=z_1^2\zeta$とおけばこれらは $H^0(L)$ の基底をなし、関係式 $C_2:=x_0x_2-x_1^2=0$ を満たす。さらに $u=\zeta_0^2\xi_1$, $v=\zeta_1^2\xi_0$, $w=\psi$とおけば (5.1), (5.2) より

$$\begin{aligned}uv &= A_2u+A_2'v+A_4,\\ w^2 &= B_0u^3+B_0'v^3+B_2u^2+B_2'v^2+B_4u+B_4'v+B_6\end{aligned}$$

を得る。次元を比較すれば$\oplus H^0(mL)$ の生成元と関係式はこれらしかないことが容易に確かめられる。従って§4 で紹介した方程式が得られた。

念のため (5.1), (5.2) の幾何学的な意味を説明する。Wを $\mathbf{P}^1$上の $\mathbf{P}^2$-束 $\mathbf{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(4))$ として、トートロジカル因子をT、ファイバーを Fと書く。X_0, $X_1\in H^0(T)$ および $X_2\in H^0(T-4F)$ をこれらが各ファイバーの同次座標を与えるようにとって固定する。まず、ζ^2, $\zeta_0^2\xi_1$, $\zeta_1^2\xi_0$が $H^0(K_D)$ の基底を誘導する事に注意する。$X_0=\zeta_0^2\xi_1$, $X_1=\zeta_1^2\xi_0$, $X_2=\zeta^2$とおくことによってΦ_Kを正則写像 $f:S\to W$に持ちあげる。その像 $V:=f(S)$ の定義式が (5.1) すなわち

$$X_0X_1=X_2(\alpha_4X_0+\alpha_4'X_1+\alpha_8X_2)$$

である。$\phi=\zeta\psi$とおくと (5.2) は

$$\phi^2=X_2(\beta_0X_0^3+\beta_0'X_1^3+\beta_4X_0^2X_2+\beta_4'X_1^2X_2+\beta_8X_0X_2^2+\beta_8'X_1X_2^2+\beta_{12}X_2^4)$$

となる。ϕは $[2T-2F]$ のファイバー座標と考えられから、この式は Vの二重被覆 S'を定める。係数α, βが一般ならば S'は非特異になる。$X_2=0$ は V上に二つの非特異有理曲線 $X_0=X_2=0$, $X_1=X_2=0$ を与え、これらは branch locus の一部である。従って因子 (X_2) は S'上に $2Z_0+2Z_1$なる形の因子を誘導する。S'の標準因子は $T\sim(X_2)+4F$ の引き上げだから even surface になるのである。